# Sur les contractions de l'espace de Hilbert.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

**1.** Par *contraction* de l'espace de Hilbert $H$ nous entendons une transformation linéaire $T$ de $H$ qui n'augmente pas les normes:

$$\|Tf\| \leqq \|f\| \quad \text{pour tout} \quad f \in H,$$

c'est-à-dire pour laquelle

$$\|T\| \leqq 1.$$

Les contractions $T$ se comportent à plusieurs points de vue tout comme les transformations unitaires. Citons les faits suivants:

a) *Éléments invariants* [1]). Si $f$ est invariant par rappont à $T$, il l'est aussi par rapport à la transformation adjointe $T^*$.

b) *Théorème ergodique* [1]). Pour tout $f \in H$, les moyennes arithmétiques

$$\frac{1}{n-m} \sum_{m}^{n-1} T^k f$$

tendent, lorsque $n > m \geqq 0$, $n-m \to \infty$, vers un élément $f^* \in H$, invariant par rapport à $T$.

c) *Théorèmes de von Neumann et de Heinz.* Soit $u(z)$ une fonction de variable complexe, holomorphe dans un domaine contenant le disque unité fermé $|z| \leqq 1$, et ayant la série entière

$$u(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

Soit

$$u(T) = c_0 I + c_1 T + \cdots + c_n T^n + \cdots. \text{ [2])}$$

Si $|u(z)| \leqq 1$ pour $|z| \leqq 1$, on a $\|u(T)\| \leqq 1$, c'est-à-dire que $u(T)$ est alors aussi une contraction. [3])

Si $\operatorname{Re} u(z) \geqq 0$ pour $|z| \leqq 1$, on a $\operatorname{Re}(u(T)f, f) \geqq 0$ pour tout $f \in H$. [4])

---

[1]) F. RIESZ—B. SZ.-NAGY, Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *ces Acta*, **10** (1943), 202–205.

[2]) Puisque $|c_n| \leqq M/r^n$ avec $r > 1$, cette série de transformations converge en norme.

[3]) J. VON NEUMANN, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 258—281.

[4]) E. HEINZ, Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum, *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, Abt. IIa, **1952**, 5—6.

Pour les transformations *unitaires* $U$, tous ces faits s'établissent d'une manière comparativement simple, surtout si l'on fait usage de la représentation spectrale de $U$.

Or il y a une relation intime entre les contractions de type général, et les transformations unitaires, par laquelle les faits cités découlent des faits correspondants pour les transformations unitaires. Cette relation est exprimée par le

Théorème I. *$T$ étant une contraction de l'espace de Hilbert $H$, il existe un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ contenant $H$ comme un sous-espace, et une transformation unitaire $\mathbf{U}$ de $\mathbf{H}$, de sorte que, en désignant par $\mathbf{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace $H$, on ait*

$$T^k = \mathbf{P}\mathbf{U}^k, \quad (T^*)^k = \mathbf{P}\mathbf{U}^{-k} \qquad (k=0,1,2,\ldots).\text{[5][6]} \tag{1}$$

Voici comment les faits énumérés dérivent par ce théorème:

a) $Tf=f$ entraîne que $\mathbf{PU}f=f$; or puisque $\|\mathbf{U}f\|=\|f\|$ et que $\mathbf{P}$ est une projection orthogonale, l'équation $\mathbf{PU}f=f$ n'est possible que si $\mathbf{U}f=f$, donc $T^*f=\mathbf{PU}^{-1}f=\mathbf{P}f=f$.

b) Comme

$$\sum_m^{n-1} T^k f = \mathbf{P}\sum_m^{n-1} \mathbf{U}^k f,$$

le théorème ergodique pour $T$ se réduit à celui pour la transformation unitaire $\mathbf{U}$.

c) On aura $u(T)=\mathbf{P}u(\mathbf{U})$. Si

$$\mathbf{U}=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\,d\mathbf{E}_\lambda$$

est la représentation spectrale de $\mathbf{U}$, il en découle que

$$\|u(T)f\|^2=\|\mathbf{P}u(\mathbf{U})f\|^2 \leqq \|u(\mathbf{U})f\|^2=\int_0^{2\pi}|u(e^{i\lambda})|^2 d(\mathbf{E}_\lambda f,f)$$

et

$$(u(T)f,f)=(\mathbf{P}u(\mathbf{U})f,f)=(u(\mathbf{U})f,f)=\int_0^{2\pi}u(e^{i\lambda})\,d(\mathbf{E}_\lambda f,f),$$

d'où les théorèmes de VON NEUMANN et de HEINZ résultent d'une manière évidente.

---

[5]) Les équations (1), et leurs analogues dans la suite, doivent être entendues dans le sens que les transformations figurant aux deux membres sont égales lorsqu'elles sont appliquées aux éléments de l'espace originel $H$.

[6]) Une représentation de type $T=\mathbf{PU}$ a été démontrée déjà par P. R. HALMOS, mais la transformation unitaire $\mathbf{U}$ qu'il a construite ne satisfait pas aux équations (1) pour $k \geqq 2$. Voir son article: Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, 2 (1950), 125—134.

**2.** Passons à la démonstration du théorème I. Fixons un élément $f$ de $H$. Puisque $|(T^k f, f)| \leqq \|f\|^2$, la fonction

$$F(z) = (f, f) + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k (T^k f, f)$$

est holomorphe dans le domaine $|z| < 1$. Puisque

$$I + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k T^k = -I + 2\sum_{k=0}^{\infty} z^k T^k = -I + 2(I - zT)^{-1} = (I + zT)(I - zT)^{-1},$$

on a, en posant $g = (I - zT)^{-1} f$,

$$F(z) = ((I + zT)g, (I - zT)g) = (g, g) + z(Tg, g) - \bar{z}(g, Tg) - z\bar{z}(Tg, Tg),$$

donc

$$\operatorname{Re} F(z) = \|g\|^2 - |z|^2 \|Tg\|^2 \geqq 0 \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

On peut alors appliquer un théorème de F. Riesz sur les fonctions holomorphes et de partie réelle positive dans le cercle unité [7]), en vertu duquel il existe une fonction de valeurs réelles et non-décroissante $\alpha(\lambda)$, $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$, telle que

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{i\lambda} z}{1 - e^{i\lambda} z} \, d\alpha(\lambda),$$

et que par conséquent

$$(2) \qquad (T^k f, f) = \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda} \, d\alpha(\lambda) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Il en vient aussi que

$$(2^*) \qquad (T^{*k} f, f) = (f, T^k f) = \overline{(T^k f, f)} = \int_0^{2\pi} e^{-ik\lambda} \, d\alpha(\lambda) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

On peut exiger que la fonction $\alpha(\lambda)$ soit continue de droite et qu'elle s'annule au point $\lambda = 0$; ainsi normée, elle sera déterminée d'une manière univoque par les équations (2) et (2*); nous la désignerons, mettant en évidence sa dépendance de $f$, par $\alpha(f; \lambda)$.

Cela étant, faisons correspondre à tout couple d'éléments $f, g$ de $H$ la fonction

$$\alpha(f, g; \lambda) = \frac{1}{4}\left[\alpha(f + g; \lambda) - \alpha(f - g; \lambda) + i\,\alpha(f + ig; \lambda) - i\,\alpha(f - ig; \lambda)\right].$$

---

7) F. Riesz, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, *Annales de l'École Normale Supérieure*, (3) **28** (1911), 33—62, en particulier p. 58—60. Cf. aussi G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis, *Berichte de Sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig*, **63** (1911), 501—511.

Comme il y a une relation analogue, pour toute transformation linéaire $S$, entre la forme bilinéaire $(Sf, g)$ et la forme quadratique $(Sf, f)$, il s'ensuit de (2) et (2*) que

$$(3) \qquad (T^k f, g) = \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda} d\alpha(f, g; \lambda), \quad (T^{*k} f, g) = \int_0^{2\pi} e^{-ik\lambda} d\alpha(f, g; \lambda)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les fonctions $\alpha(f, g; \lambda)$, étant continues de droite et s'annulant pour $\lambda = 0$, sont déterminées par les équations (3) d'une manière univoque; on a donc en particulier $\alpha(f, f; \lambda) = \alpha(f; \lambda)$. Comme les membres gauches des équations (3) sont des formes bilinéaires symétriques (hermitiennes) en $f, g$, il en sera de même de $\alpha(f, g; \lambda)$, pour toute valeur fixée de $\lambda$. Comme de plus

$$0 \leqq \alpha(f; \lambda) \leqq \alpha(f; 2\pi) = \int_0^{2\pi} d\alpha(f; \mu) = (f, f)$$

(cas particulier $k = 0$ de (2)), la forme quadratique $\alpha(f; \lambda) = \alpha(f, f; \lambda)$ attachée à la forme bilinéaire $\alpha(f, g; \lambda)$ a, sur la sphère unité de l'espace $H$, les bornes inférieure et supérieure 0 et 1.

Donc il existe, pour tout $\lambda$ fixé, $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$, une transformation autoadjointe bornée $F_\lambda$ de $H$, telle que

$$(4) \qquad \alpha(f, g; \lambda) = (F_\lambda f, g)$$

pour tout $f, g \in H$, et que, par conséquent,

$$(5) \qquad F_\lambda \leqq F_\mu \quad \text{pour} \quad \lambda < \mu, \quad F_{\lambda+0} = F_\lambda, \quad F_0 = O, \quad F_{2\pi} = I.$$

Or un théorème de M. A. NAIMARK[8]) affirme que toute famille $\{F_\lambda\}$ de transformations autoadjointes bornées de l'espace $H$, jouissant des propriétés (5), peut être représentée sous la forme

$$F_\lambda = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 2\pi)$$

où $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ est une famille spectrale de projections orthogonales d'un certain espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ contenant l'espace originel $H$ comme un sous-espace, et où $\boldsymbol{P}$ est la projection orthogonale sur $H$.

De (3) et (4) il résulte que

$$T^k = \boldsymbol{P} \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda, \quad T^{*k} = \boldsymbol{P} \int_0^{2\pi} e^{-ik\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

d'où l'on obtient les équations (1) avec la transformation unitaire

$$\boldsymbol{U} = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

---

[8]) М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. мат., 4 (1940), 227—309 (résumé en anglais: 309—318); Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, Доклады Акад. Наук СССР, 41 (1943), 373—375.

**3.** Le théorème obtenu a son analogue "continu" pour les familles de contractions $T_t$ dépendant du paramètre réel $t \geqq 0$ et formant un semi-groupe (fortement) continu, c'est-à-dire telles que

$$T_0 = I,\ T_{s+t} = T_s T_t,\ T_s \to T_t \quad \text{pour} \quad s \to t.$$

Le voici:

Théorème II. *Si les contractions $T_t$ $(0 \leqq t < \infty)$ de l'espace de Hilbert $H$ forment un semi-groupe continu, il existe un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ contenant $H$ comme un sous-espace, et un semi-groupe continu de transformations unitaires $\boldsymbol{U}_t$ de $\boldsymbol{H}$, de sorte que, en désignant par $\boldsymbol{P}$ la projection orthogonale sur le sous-espace $H$, on ait*

$$T_t = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_t \qquad (0 \leqq t < \infty). \tag{6}$$

Démonstration. $(T_t f, f)$ étant, pour $f$ fixé, une fonction bornée et continue de $t$, on peut former, pour $\operatorname{Re} z > 0$, l'intégrale

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-tz}(T_t f, f)\, dt.$$

Il est connu[9]) que la valeur de cette intégrale est égale à

$$((zI - A)^{-1} f, f)$$

où $A$ est la transformation "infinitésimale" attachée au semi-groupe $\{T_t\}$:

$$A = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t - I);$$

$A$ est une transformation linéaire fermée, de domaine $D_A$ dense dans $H$, et $(zI - A)^{-1}$ est une transformation partout définie et bornée pour $\operatorname{Re} z > 0$.

En posant

$$g = (zI - A)^{-1} f,$$

la fonction $F(z)$ peut donc être exprimée sous la forme

$$F(z) = (g, (zI - A) g) = \bar{z}(g, g) - (g, Ag) = \bar{z}(g, g) + \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g, (I - T_t) g),$$

d'où il vient que

$$\operatorname{Re} F(z) = (\operatorname{Re} z) \|g\|^2 + \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\|g\|^2 - \operatorname{Re}(g, T_t g)].$$

Or

$$|\operatorname{Re}(g, T_t g)| \leqq |(g, T_t g)| \leqq \|T_t\| \|g\|^2 \leqq \|g\|^2,$$

donc

$$\operatorname{Re} F(z) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Il est connu que toute fonction $F(z)$, holomorphe et de partie réelle non-négative dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, et pour laquelle

$$|x F(x + iy)| \leqq C \quad \text{pour} \quad x > 0, \tag{7}$$

---

9) Cf. E. Hille, *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948), p. 228—230.

peut être représentée sous la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - i\lambda}\, d\alpha(\lambda) \tag{8}$$

avec une fonction à valeurs réelles, non-décroissante et bornée $\alpha(\lambda)$.[10]) Comme, dans le cas que nous avons en vue, toutes ces conditions sont vérifiées, y compris, évidemment, la condition (7), nous avons la représentation (8). Vu que

$$\frac{1}{z - i\lambda} = \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t}\, e^{-tz}\, dt, \tag{9}$$

il résulte, par les théorèmes d'unicité pour les intégrales de Laplace, que

$$(T_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\alpha(\lambda).$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème I; on obtient les transformations unitaires $\boldsymbol{U}_t$ sous la forme

$$\boldsymbol{U}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\boldsymbol{E}_\lambda\,.$$

Remarquons que, grâce au théorème II, le théorème ergodique pour les semi-groupes continus de contractions et les analogues des théorèmes de VON NEUMANN et de HEINZ, qu'il est aisé de formuler, découlent des théorèmes correspondants pour les semi-groupes continus de transformations unitaires.

*(Reçu le 30 juin 1953)*

---

10) Cf. R. NEVANLINNA, Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjes'sche Momentproblem, *Annales Academiae Sci. Fennicae,* (A) 18 (1922), N° 5; W. CAUER, The Poisson integral for functions with positive real part, *Bulletin American Math. Soc.,* 38 (1932), 714—717. Cf. aussi M. TSUJI, On positive definite sequences and functions, *Tôhoku Math. Journal,* (2) 2 (1950), 142—165.